

المنطق والرياضيات

ودورهما في تشكيل المعرفة العلميّة

د. راضي خازم

المعهد الوطني للإدارة العامّة

كانون الثاني ٢٠١٩

مقاربة أولية لمفهوم العلم

- العلم هو نتاج عمليات ذهنيّة ممنهجة.
- يرتبط العلم بتراكم المعرفة (عن طريق الخبرة والممارسة، التعلّم والاطلاع، البحث والتقصي،...).
- يختصّ العلم بمجال معيّن من مجالات المعرفة.
- يكون للعلم لغته الخاصّة التي "تمنع" الالتباس في مجال تخصّصه (← مفهوم المصطلح).
- يتطلّب العلم الانسجام المنطقي بين المعارف المكوّنة له، كما يتطلّب توافق هذه المعارف مع معطيات الواقع.

تعريف مبسط للعلم

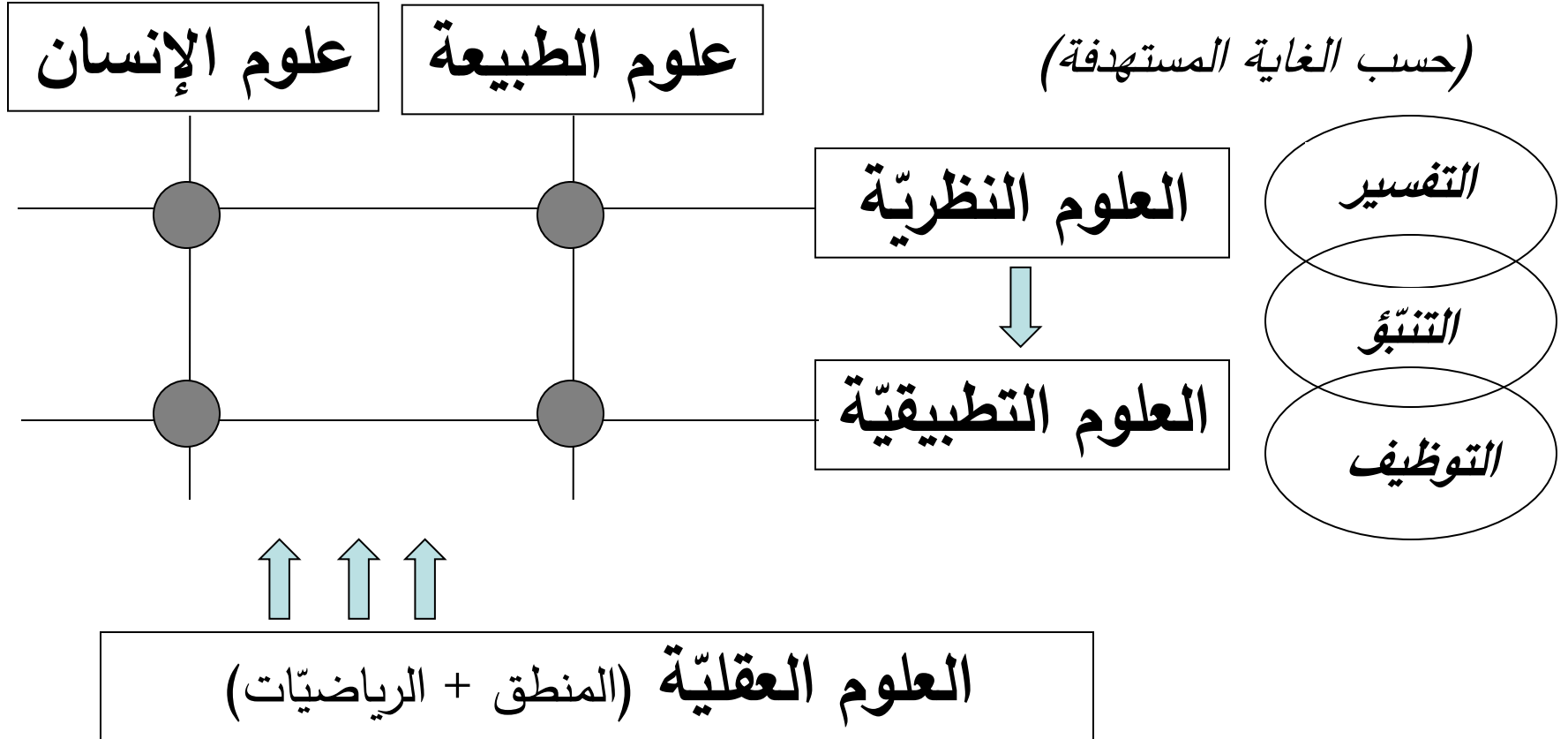
العلم هو مجموعة من المعارف المنظمة،
المتماسكة منطقيًا والمتوافقة مع الوقائع
الملحوظة في مجالٍ معيّن، معبراً عنها
بمصطلحات مضبوطة، ومدعومةً
بمجموعة من الأساليب والأدوات الذهنيّة
التي أثبتت جدواها في هذا المجال.

الأهداف الأساسية للنشاط العلمي

- التفسير، أي تمكين الإنسان من فهم الظواهر المحيطة به.
- الضبط والسيطرة، أي تمكين الإنسان من التحكم بالظواهر أو التأثير فيها وتوظيفها، مما يعزز قدرته على تلبية احتياجاته (← مفهوم التكنولوجيا).
- التنبؤ، أي تمكين الإنسان من توقع منحنى تطوّر الظواهر، مما يساعده على إدارة شؤونه والتخطيط لمستقبله.

تصنيف مبسّط للعلوم

(حسب مجال الاهتمام)



المسلمات التقليديّة للتفكير العلمي / ١

أولاً: للطبيعة نظام رتيب (أي يتسم بالاستقرار)،
ويتضمّن ذلك قبول فكرتين:

✓ قانون السببيّة (أي ارتباط الظواهر فيما بينها بعلاقة
سبب/نتيجة)؛

✓ مسلمة الترابط (أي إمكانية تصنيف الأشياء في أجناس
وفق تراتبيّة معيّنة).

المسلمات التقليديّة للتفكير العلمي / ٢

ثانياً: العقل الإنساني قادر على سبر نظام الطبيعة،
ويتضمّن ذلك قبول فكرتين:

✓ حواس الإنسان أدوات صالحة للوصول إلى معرفة موثوقة، ولكنّ قدرتها تبقى محدودة ويمكن تعزيزها بأدوات مساندة؛

✓ الاستدلال العقلي متوافق مع متطلبات إدراك الحقيقة،
بمعنى أنّ العقل هو وسيلة ناجعة لفهم العالم.

الطرق التقليدية في تحصيل المعرفة العلميّة

- التجريب (بدءاً بالمحاولة والخطأ وصولاً إلى التجريب المنهجي)؛
- اللجوء إلى المرجعيّات (بدءاً بالحكيم والفيلسوف وصولاً إلى العالم والخبير والمختصّ ← مفهوم التأهيل الأكاديمي)؛
- التفكير القياسي (بدءاً بالقياس المنطقي القائم على الاستنتاج وصولاً إلى المحاكاة المستندة إلى القياس على المشابه)؛
- التفكير الاستقرائي (الذي يقوم على الانتقال من رصد الحالات الخاصّة إلى صياغة قوانين وقواعد عامّة ← مفهوم النمذجة).

للمنطق والرياضيّات دور حاسم في دعم وتطوير

نمطي التفكير المذكورين آنفاً.

حول مفهوم السببية

- السببية هي العلاقة التي تربط وقوع حدث لاحق (النتيجة) بوقوع حدث سابق (السبب).
- يمكن كشف الارتباطات السببية في ظاهرة عن طريق رصد حالات:
 - التلازم في الوقوع / التلازم في الغياب / الترابط بين التغيرات.
- عندما يؤدي وقوع السبب إلى وقوع النتيجة حتماً يكون السبب كافياً، أمّا عندما يؤدي غياب السبب إلى غياب النتيجة حتماً فيكون السبب لازماً.

الحتميّة والاحتماليّة

• تقوم الحتميّة على التسليم بأنّ السببيّة ذات طبيعة مطلقة، فالضرورة هي التي تحكم الظواهر ولا مكان للصدفة موضوعياً، وبهذا المعنى فإنّ المعرفة يمكن أن تكون يقينيّة.

• أمّا الاحتماليّة فلا تسلّم إلاّ بدور نسبيّ للسببيّة، إذ تعتبر الصدفة هنا إحدى مكوّنات الظاهرة، سواء كوجود موضوعيّ أو كنتيجة لضعف قدرة العقل البشريّ أمام الكون اللامتناهي الذي يتضمّن على الدوام عوامل إضافية غير قابلة للحصر، وبهذا المعنى فإنّ المعرفة محكومة بأن تكون نسبية.

بعض السمات الأساسية للتفكير العلمي المعاصر

• لا وجود لليقين المطلق في المعرفة العلميّة، والتساؤل المبني على الشكّ المنهجي هو أحد المكونات الأساسية للتفكير العلمي المعاصر.

• المضامين التي تشتمل عليها المعرفة العلميّة يجب أن تكون قابلةً للمساءلة والاختبار (وصولاً إلى إمكانية دحضها)؛

• المعرفة العلميّة نسبيّة الصّحة، وتتطوّر باستمرارٍ باتجاه صحّة أكثر رسوخاً وفق مسارٍ ليس مطرداً بالضرورة.

دور المنطق في تشكيل المعرفة

• يزودنا المنطق بمجموعة من المبادئ والقواعد التي تضمن تماسك وانسجام التمثيلات الذهنية (أي المفاهيم وتركيباتها) التي تتكوّن منها المعرفة.

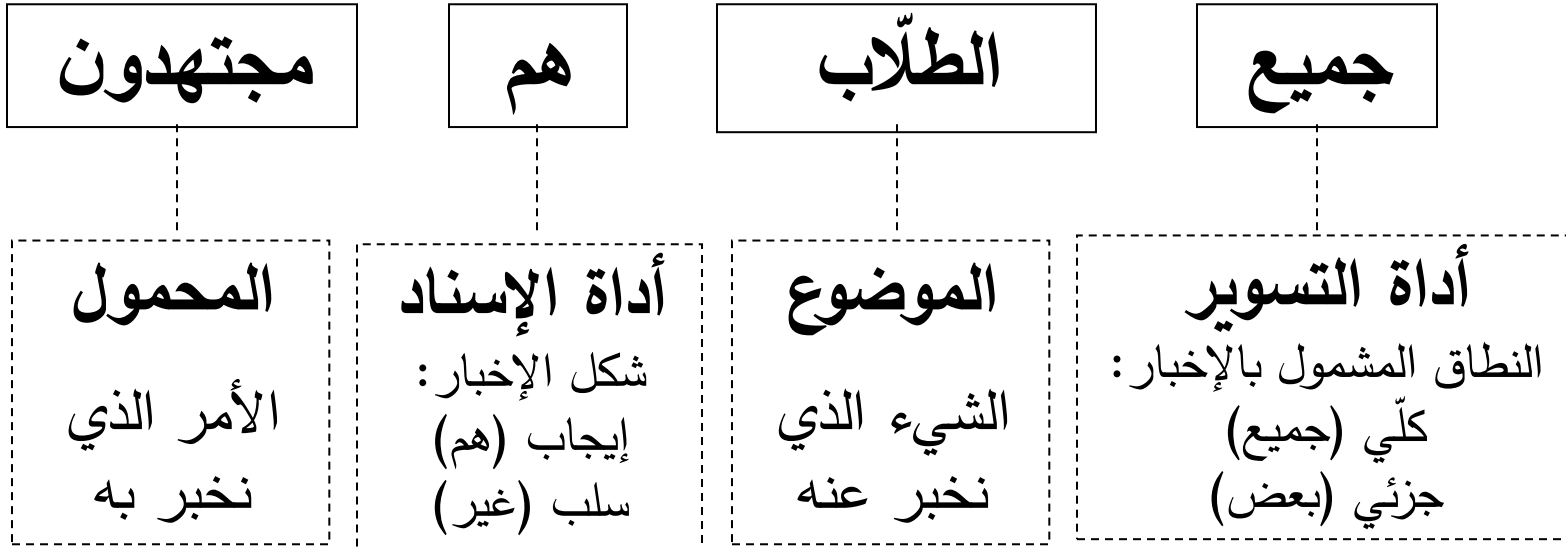
• يهتمّ المنطق الصوري بهذه التمثيلات على خلفيّة ارتباطاتها السكونيّة، ومن أهمّ مبادئه:
الهويّة / عدم التناقض / الثالث المرفوع.

• أمّا المنطق الجدلي فيرصد هذه التمثيلات في سياق تبدّلها وتطوّرها، ومن أهمّ مبادئه:
تحوّل الكمّ إلى كيف / تراكب الأضداد / نفي النفي.

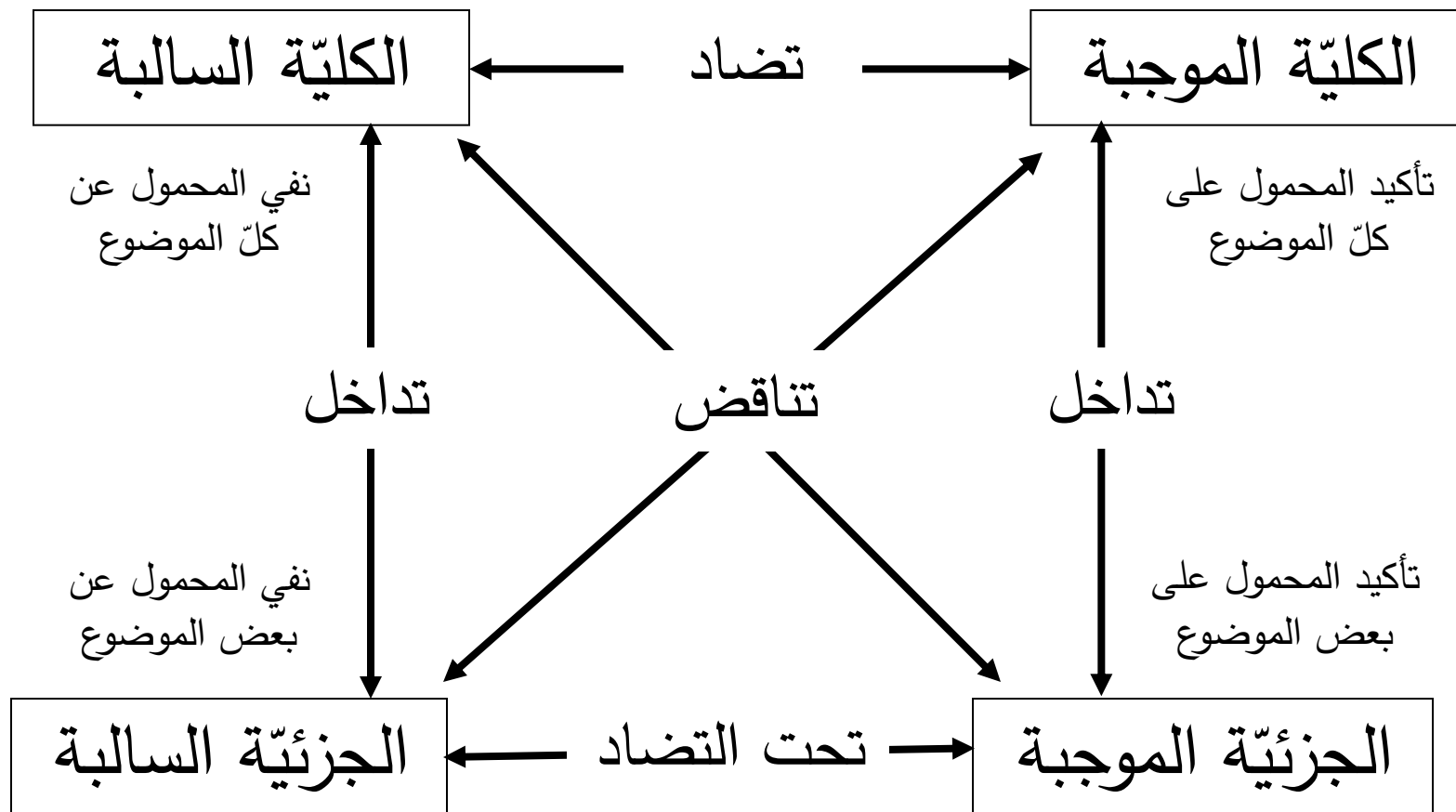
القضية المنطقية ومكوناتها

القضية المنطقية هي عبارة تُخبر بأمرٍ ما عن شيءٍ ما
ويمكن أن نحكم عليها بأنها صحيحة أو خاطئة.

تتألف القضية في صيغتها البسيطة من أربعة مكونات يوضحها
المثال التالي:



الارتباطات الأساسية بين القضايا: مربع أرسطو



تعقيبات على الارتباطات بين القضايا

- **التضاد:** لا يمكن للكليتين المتقابلتين أن تصحاً معاً، ولكن يمكن لهما أن تخطئاً معاً.
- **تحت التضاد:** يمكن للجزئيتين المتقابلتين أن تصحاً معاً، ولكن لا يمكن لهما أن تخطئاً معاً.
- **التناقض:** لا يمكن للكليّة والجزئيّة المتقابلتين أن تصحاً معاً ولا أن تخطئاً معاً، فصواب إحداهما يقود إلى خطأ الأخرى، وخطأ إحداهما يقود إلى صواب الأخرى.
- **التداخل:** صواب الكليّة يقود إلى صواب الجزئيّة الموافقة، وخطأ الجزئيّة يقود إلى خطأ الكليّة الموافقة.

القضايا المركبة والاستدلال المنطقي

- القضية المركبة هي قضية مكوّنة من عدّة قضايا بسيطة تربط بينها واحدة أو أكثر من أدوات الربط المنطقي (العطف، الإباحة، النفي، التخيير، الاقتضاء، التكافؤ، ...).
- الاستدلال هو المحاكمة العقلية التي تقود إلى الحكم بصواب أو خطأ قضايا مستهدفة (النتائج) انطلاقاً من الأحكام المعلومة بشأن قضايا أخرى متّصلة بها (المقدّمات). وللاستدلال شكلان أساسيان:
 - الاستنتاج: الانتقال من الكلّي (العام) إلى الجزئيّ (الخاصّ).
 - الاستقراء: الانتقال من الجزئيّ (الخاصّ) إلى الكلّي (العام).
- يقدّم المنطق المبادئ والقواعد اللازمة والضامنة لسلامة الاستدلال.

عودة إلى مبادئ المنطق الصوري

- الهوية: لا يمكن للقضية أن تكون صحيحة وخاطئة في الآن نفسه.
- عدم التناقض: لا يمكن للقضية ونفيها أن يكونا صحيحين في آنٍ معاً.
- الثالث المرفوع: لا يمكن للقضية ونفيها أن يكونا خاطئين في آنٍ معاً.

عودة إلى مبادئ المنطق الجدلي

- تحوّل الكمّ إلى كيف: يمكن لتراكم التغيّرات الكميّة أن يقود إلى تغيّر نوعي يبدّل الهوية.
- تراكب الأضداد: يمكن للضدّين أن يتراكبا في كينونةٍ جامعةٍ ويصبح تطوّرها مرهوناً بتفاعلهما.
- نفي النفي: النفي المكرّر لا يعيد بالضرورة إلى الأصل بل قد يقود إلى كينونةٍ جديدةٍ تحمل سماتٍ من الأصل ونفيه.

المنطق الغائم

- المنطق الغائم هو شكل من أشكال المنطق يقوم على كسر ثنائِيّة الحكم المعتمدة في المنطق الصوري التقليدي.
- بدلاً من القيمتين صحيح/خاطئ المعتمدتين أساساً للحكم على القضايا في المنطق الصوري يعتمد المنطق الغائم حكماً تتدرّج قيمته بين هاتين القيمتين.
- يُعبّر عن الحكم في المنطق الغائم عادةً بدالّة رياضيّة تُدعى درجة الحقيقة، بحيث تأخذ هذه الدالّة قيمةً تتراوح بين $0/$ للدلالة على الحكم القاطع بالخطأ و $1/$ للدلالة على الحكم القاطع بالصحة.

المنطق الجهوي

- المنطق الجهوي هو شكل من أشكال المنطق يقوم على كسر ثنائِيَّة الإسناد المعتمدة في المنطق الصوري التقليدي.
- بدلاً من الشكلين إيجاب/سلب المعتمدين أساساً لإسناد المحمول إلى الموضوع في المنطق الصوري يعتمد المنطق الجهوي أربعة أشكالٍ للإسناد:

- **الضروري** الذي يفيد الوجود (الجزم بالإيجاب)؛
- **الممتنع** الذي يفيد الاستحالة (الجزم بالسلب)؛
- **العارض** الذي يفيد عدم الوجود؛
- **الممكن** الذي يفيد عدم الاستحالة.

دور الرياضيات في تشكيل المعرفة العلمية

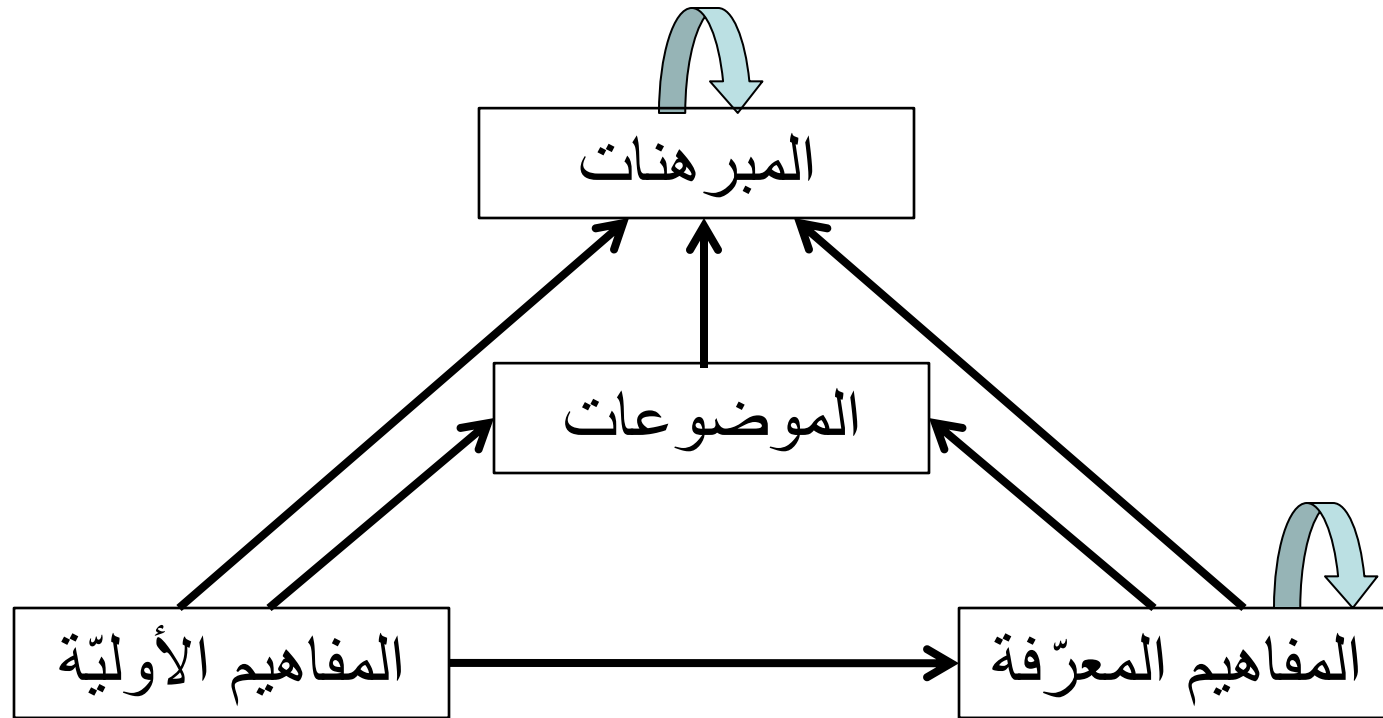
- الرياضيات هي لغة عموميّة مضبوطة ومرمّزة لتمثيل السمات المجرّدة للأشياء والعلاقات القائمة بينها.
- يجري التركيز في الرياضيات عادةً على الجوانب المتّصلة بالكمّ والشكل والترتيب والتصنيف.
- تهدف الرياضيات بصورةٍ رئيسيّةٍ إلى نمذجة المواضيع التي تدرسها، أي إلى التعبير عن هذه المواضيع بطريقةٍ رياضيّةٍ سليمةٍ، ومن ثمّ تسعى إلى إيجاد الحلول وإنشاء البراهين عن طريق كشف علاقات غير معروفة أو تأكيد ارتباطات غير مثبتة انطلاقاً من أخرى معلومة أو جرى إثباتها سابقاً، وذلك باتباع أساليب متوافقة مع قواعد الاستدلال المنطقيّ.

عناصر المنظومة الرياضيّة

- المفاهيم الأوليّة: وهي مفاهيم لا تحتاج إلى تعريف (مثل: النقطة، المجموعة، الانتماء، العلاقة، ...)
- المفاهيم المعرّفة: وهي مفاهيم جرى تعريفها استناداً إلى مفاهيم أوليّة أو مفاهيم أخرى معرّفة سابقاً؛
- الموضوعات: وهي قضايا مسلّم بصحّتها دون الحاجة إلى إثبات؛
- المبرهنات: وهي قضايا جرى إثبات صحّتها عن طريق البرهان انطلاقاً من الموضوعات والمبرهنات السابقة.

بنية المنظومة الرياضيّة

- تنتظم المعارف الرياضيّة في بني جزئية نسمّيها النظريّات.
- تهتمّ النظرية بمعالجة موضوع معرّف النطاق، وتترابط عناصرها في بنية متكاملة على النحو المبين في المخطّط المبسّط التالي:



البراهين والحلول في الرياضيات

❖ البرهان هو المسعى العقلي (الرياضي/المنطقي) الذي يقود إلى إثبات غير المثبت استناداً إلى ما هو مثبت.

❖ الحل هو المسعى العقلي (الرياضي/المنطقي) الذي يقود إلى إظهار المجهول استناداً إلى ما هو معلوم.

أشكال البراهين في الرياضيات

- **التقليدي:** وهو يتألف من مجموعة من الخطوات المتعاقبة التي يستند كلٌّ منها إلى ما سبقه، مع وجوب التفريع لاستيفاء الحالات الممكنة كلما ظهرت الحاجة إلى ذلك.
- **الاستقرائي:** وهو يُستخدم عادةً للتعامل مع المسائل التي يمكن ردّها إلى نقلاتٍ متسلسلةٍ مضبوطة، إذ يكفي في هذه الحالة أن نثبت صحّة وضع ابتدائيّ، وأنّ صحّة كلِّ نقلةٍ تؤدّي إلى صحّة التي تليها.
- **الإنشائي:** وفيه نضيف إلى معطيات المسألة عناصر جديدة تساعد على البرهان ويمكن تحييدها لاحقاً.
- **نقض الفرض:** وفيه نبين خطأ الافتراض النقيض.

المنطق الصوري من منظور رياضي

• تمّ تناول المنطق الصوري من زاوية رياضية تحت عنوانين:
جبر القضايا وجبر بول.

• يجري تمثيل القضايا المنطقية في جبر القضايا بمتحوّلات
تأخذ إحدى القيمتين:

T (للصواب) ؛ **F** (للخطأ).

• سنستخدم الأحرف (A, B, \dots) لترميز القضايا المنطقية
فيما يأتي، وسنعرف أدوات الربط المنطقي الأساسية.

العطف المنطقي

• يتمثل العطف المنطقي بالقضية المركبة (A و B) التي نرسم لها بـ $A \wedge B$

• تتحدّد القيمة المنطقية لهذه القضية استناداً إلى الجدول التالي:

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

الإباحة المنطقية

• تتمثل الإباحة المنطقية بالقضية المركبة (A أو B) التي نرسم لها بـ $A \vee B$

• تتحدد القيمة المنطقية لهذه القضية استناداً إلى الجدول التالي:

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

التخيير المنطقيّ

• يتمثل التخيير المنطقي بالقضية المركبة (إمّا A وإمّا B) التي نرّمز لها بـ $A \vee B$

• تتحدّد القيمة المنطقية لهذه القضية استناداً إلى الجدول التالي:

A	B	$A \vee B$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

النفي المنطقي

• يتمثل النفي المنطقي بالقضية المركبة (نفي A) التي نرسم لها بـ $\neg A$

• تتحدّد القيمة المنطقية لهذه القضية استناداً إلى الجدول التالي:

A	$\neg A$
T	F
F	T

الاقْتِضَاءُ المنطقيّ

• يتمثل الاقْتِضَاءُ المنطقيّ بالقضية المركّبة (A تقتضي B) التي نرّمز لها بـ $A \Rightarrow B$

• تتحدّد القيمة المنطقية لهذه القضية استناداً إلى الجدول التالي:

A	B	$A \Rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

بعض المفاهيم المتّصلة بالبحث العلمي / ١

- **الإشكاليّة:** وهي تعني الإقرار بوجود نقص أو ضعف في المعرفة الخاصّة بموضوع محدّد. ويعتبر تحديد الإشكاليّة نقطة الانطلاق في صياغة مسألة البحث وفرضيّاته.
- **المنهجية:** وهي تحدّد الإطار العام للمسار الذي سيسلكه الباحث في معالجة مسألته. وتتضمّن المنهجية تحديداً لمراحل العمل وللأساليب والطرائق المستخدمة في كلّ مرحلة، إضافة إلى آليّة الانتقال بين هذه المراحل.

بعض المفاهيم المتّصلة بالبحث العلمي / ٢

• **المسلّمة:** هي قضية غير خلافيّة، أي تمّ الاتفاق على اعتبارها صحيحة. مع التنويه إلى أنّ الباحث قد يلجأ أحياناً إلى التعامل مع بعض القضايا الخلافيّة كمسلّمات بصورة مؤقتة، وذلك لضرورة إنشاء بحثه والتركيز على قضايا أخرى، ولكنّ نتائجها تصبح مشروطة بقبولها.

• **الفرضيّة:** هي جواب استباقيّ بخصوص مسألة خلافيّة ترتبط بإشكاليّة البحث، بحيث يقود البحث إلى تأكيدها أو دحضها بدرجات متفاوتة من الثقة. بصورة عامّة يسعى الباحث عند صياغة فرضيّاته إلى إنشاء ارتباطات بين عدّة عوامل (أو متغيّرات)، ومن الضروري في هذا السياق أن يجري التمييز بين ثلاث فئات أساسيّة من العوامل: المتغيّرات المستقلة، المتغيّرات التابعة، الظروف المؤثّرة.